UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Nivelación 2014

MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

DEFINICIÓN EMPÍRICA O FRECUENCIAL O A POSTERIORI 1
DEFINICIÓN FRECUENCIAL O EMPÍRICA 2
DEFINICIÓN AXIOMÁTICA 2
PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE LA PROBABILIDAD 3

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

DEFINICIÓN EMPÍRICA O FRECUENCIAL O A POSTERIORI

La aplicación de la definición clásica de probabilidad puede presentar dificultades de aplicación cuando el espacio muestral es infinito o cuando los posibles resultados de un experimento no son equiprobables. Desafortunadamente, hay situaciones prácticas que son de este tipo y la definición de Laplace no se puede aplicar. Por ejemplo, si se pregunta por la probabilidad de que una determinada máquina produzca artículos defectuosos, entonces no hay forma de introducir resultados igualmente probables.

Por ello se necesita una definición más general de probabilidad. Una forma de dar respuesta a esta pregunta es obtener algunos datos empíricos en un intento por estimar las probabilidades.

Si se realiza n veces un experimento aleatorio y el suceso A se presenta n_A veces, su frecuencia relativa es $f_A=n_A/n$.

Como consecuencia de la propia definición, resultan las siguientes propiedades:

1. $0 \leq f_A \leq 1$.
2. $f_A=0$ si A no ocurre y $f_A=1$ si A ocurre en cada repetición.
3. A y B disjuntos, $f_{AUB}= f_A+ f_B$

La definición empírica de probabilidad nos permite afirmar que la probabilidad de obtener un determinado suceso A es el valor hacia el cual tiende la frecuencia relativa, cuando el número de observaciones tiende a infinito.

Es imposible llegar a este límite, ya que no podemos repetir el experimento un número infinito de veces, pero si podemos repetirlo muchas veces y observar como las frecuencias relativas tienden a estabilizarse.

Esta definición frecuentista de la probabilidad se llama también probabilidad a posteriori ya que sólo podemos dar la probabilidad de un suceso después de repetir y observar un gran número de veces el experimento aleatorio correspondiente.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

DEFINICIÓN FRECUENCIAL O EMPÍRICA

Sea A un evento contenido en el espacio muestral de un experimento aleatorio, denotemos por n_A al número de veces que ocurre el evento A, luego de n repeticiones

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_A = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

Desafortunadamente se tiene que para cada A fijo, f_A no es constante pues su valor depende de n; sin embargo se ha observado que cuando un experimento aleatorio se realiza un número suficientemente grande de veces, bajo condiciones similares, la frecuencia relativa f_A se estabiliza alrededor de un valor específico entre 0 y 1.

En la práctica la probabilidad se aproxima por la frecuencia relativa al repetir el experimento un número grande de veces; es decir: $P(A) \approx f_A = n_A/n$.

La estabilidad de f_A, no es del todo una conclusión matemática, sino simplemente una realidad empírica. Por esto, la definición anterior no es una definición correcta de probabilidad, matemáticamente.

Ejemplo 4.27. Un ingeniero eléctrico estudia la demanda máxima en una planta generadora de electricidad. Se observa que en 80 de 100 días seleccionados aleatoriamente para estudio, de registros pasados, la demanda máxima ocurre entre las 18:00 y 19:00 horas. Es natural suponer que la probabilidad de que ello ocurra en cualquier otro día es:

$$P(A) \approx f_A = n_A/n = 80/100 = 0.80$$

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

La definición axiomática de la probabilidad es quizás la más simple de todas las definiciones y la menos controvertida ya que está basada en un conjunto de axiomas que establecen los requisitos mínimos para dar una definición de probabilidad.

La ventaja de esta definición es que permite un desarrollo riguroso y matemático de la probabilidad. Fue introducida por A. N. Kolmogorov (1903-1987) y aceptada por estadísticos y matemáticos en general.

Definimos la probabilidad de A, P(A), como una función de conjuntos, donde el dominio son eventos y el recorrido son el conjunto de los números reales.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

DEFINICIÓN AXIOMÁTICA

Sea ***S*** espacio muestral finito y ***C*** conjunto de eventos de ***S,*** se define la función real *P*:

$$P: \ C \longrightarrow R$$
$$A \subset S, \ A \ \sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim > P(A)$$

tal que satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1: Para cada evento A: $0 \leq P(A) \leq 1$

Axioma 2: $P(S)=1$

Axioma 3: Si $A \cap B=\Phi$, entonces $P(A \cup B)=P(A) + P(B)$

Entonces P se denomina **función de probabilidad** y **P(A)** es denominada **probabilidad del evento A.**

El Axioma 1, señala que P(A) es un número en el intervalo real [0, 1]. Axioma 2, la probabilidad máxima de 1 se asigna a ***S.*** Axioma 3, la función probabilidad es aditiva. Obsérvese que los axiomas no dicen como asignar las probabilidades, ellos restringen únicamente la manera de como hacer la asignación.

La asignación se basa en:

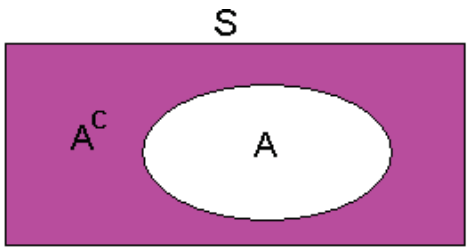
1. Estimaciones en base a observaciones previas (enfoque a priori).
2. Consideración analítica del experimento (enfoque a posteriori).

De los axiomas anteriores podemos demostrar varios teoremas sobre probabilidad que son importantes en el estudio posterior.

PROPIEDADES MÁS IMPORTANTES DE LA PROBABILIDAD

Teorema 1: Si A^c es el complemento de *A* entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$



$A \cup A^C = S$ ¿Por qué?

$P(A)+P(A^C)=P(S)$ ¿Por qué?

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$P(A)=1 - P(A^C)$ ¿Por qué?

Las probabilidades complementarias son muy útiles cuando se pregunta por la probabilidad de "por lo menos". En general, esto representa una combinación de varios eventos, pero el evento complemento "ninguno" es un solo resultado.

Ejemplo 4.28. Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea por lo menos 3 (es decir, 3 o más)?
En vez de encontrar la probabilidad de cada una de las sumas cuyo resultado es 3 o más, es mucho más sencillo encontrar la probabilidad de que la suma sea 2 (menor que tres) y luego aplicar el teorema, dejando que "por lo menos" sea A. Así, sean los eventos A: suma sea por lo menos 3 y A^c: suma sea 2

$$P(A^c)=1/36; \quad P(A)=1-P(A^c)=1-1/36=35/36.$$

Ejemplo 4.29. Según un artículo publicado en una revista (1991), una de cada nueve personas a quienes se diagnosticará SIDA durante 1991 será una mujer. Con base en esta información, encuentre la probabilidad de que una persona a la que se diagnosticará SIDA en 1991 sea hombre.
P(mujer que se le diagnostica SIDA)+P(hombre que se le diagnostica SIDA)=1
P(hombre que se le diagnostica SIDA)=1- P(mujer que se le diagnostica SIDA)
=1- 1/9
=8/9.

Teorema 2: Si *A* y *B* son dos eventos cualesquiera, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

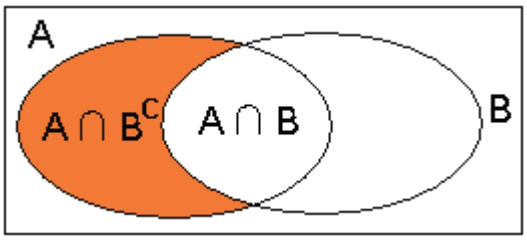
Ejemplo 4.30. Una tienda vende partes nuevas y usadas. 60% de las partes que hay en existencia son usadas. El 61% son usadas ***o*** están defectuosas. Si 5% están defectuosas, ¿Qué porcentaje de partes son usadas ***y*** están defectuosas?
Sea A: partes usadas; B: partes defectuosas; y A ∩ B: partes usadas ***y*** defectuosas.

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B)$$
$$=0.60+0.05 - 0.61$$
$$=0.04.$$

Teorema 3: Para dos sucesos *A* y *B*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^C)$$

$$P(A)=P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

Ejemplo 4.31. En el ejemplo anterior, ¿cuál es el porcentaje de partes usadas sin defectos?

partes usadas sin defectos =partes usadas ***y*** que ***no*** tienen defectos = $A \cap B^C$

$$P(A)=P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$$

$$P(A \cap B^C)=P(A) - P(A \cap B)$$

$$=0.60 - 0.04 \qquad =0.56.$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013